MSG Klasse 7b
Andrea Hoffkamp
Internet: wikis.zum.de/qed

Rechnen mit Kongruenzen
Teil 1

Aufgabe 1: (Vorbereitung)

Nenne und begründe Rechenregeln für das Rechnen mit Potenzen.

Aufgabe 2: (Einstieg und typische Probleme)

Das Rechnen mit Kongruenzen ist eine Methode der Zahlentheorie, also der Mathematik der ganzen Zahlen. Die Idee kommt von der Division mit Rest; das Rechnen mit Kongruenzen wird daher auch oft Rechnen mit Resten oder mit Restklassen genannt.

Rechnen mit Kongruenzen hilft bei Fragen, die mit Teilbarkeit oder Resten zu tun haben. Am Ende der folgenden drei Wochen werden wir die folgenden Fragen sehr leicht beantworten können. Ohne die nötige Theorie ist die Beantwortung aber recht kompliziert:

(1) Welchen Rest lässt die Zahl 12^{10} bei Division durch 11?

(2) Auf welche Ziffer endet die Zahl 3^{100}?

(3) Aus der österreichischen Mathematik-Olympiade 2003:

Warum ist der Ausdruck n^3+6n^2+14n für alle natürlichen Zahlen n durch 3 teilbar?

(4) Aus der (deutschen) Mathematik-Olympiade, Aufgabe **491031**:

Wie lauten die letzten drei Ziffern von 7^{2010}?

Bildet vier Gruppen und versucht gemeinsam die Lösungen zu finden. Falls Ihr die Lösung nicht findet: Beschreibt auf welche Schwierigkeiten Ihr gestoßen seid? Beschreibt auch wie Ihr vorgegangen seid?

Aufgabe 3: (Erstes Rechnen mit Kongruenzen)

Welche der folgenden Aussagen sind wahr, welche falsch?

a) $17 \equiv 10245332 \mod 3$

b) $17 \equiv 10245322 \mod 17$

c) $17 \equiv 10245332 \mod 17$

d) $17 \equiv n*17 \quad \mod 17$ für alle $n \in \mathbb{N}$

e) $1 \equiv 365 \quad \mod 7$

Aufgabe 4: (Erstes Rechnen mit Kongruenzen)

Suche jeweils einige Zahlen $x \in \mathbb{N}$ mit

a) $2 \equiv x \mod 3$

b) $7 \equiv x \mod 4$

c) $7 \equiv x \mod 15$

Aufgabe 5: (Erstes Rechnen mit Kongruenzen)

Suche alle Zahlen $m \in \mathbb{N}$ mit

a) $11 \equiv 41 \mod m$

b) $16 \equiv 24 \mod m$

c) $16 \equiv 17 \mod m$