Aufgaben-Blatt 13

vom 20. bis 27. Februar 2014

1. **Geometrische Klassifizierung pythagoräischer Tripel**

   (a) Zeige, dass sich jedem pythagoräischen Tripel ein Lösungspaar (x, y) rationaler Zahlen x, y der Gleichung $x^2 + y^2 = 1$ zuordnen lässt.

   (b) Zeige, dass umgekehrt jedes Lösungspaar (x, y) rationaler Zahlen x, y der Gleichung $x^2 + y^2 = 1$ ein pythagoräisches Tripel liefert.

   (c) Welche geometrische Figur wird durch die Gleichung $x^2 + y^2 = 1$ in einem Koordinatensystem beschrieben?

   (d) Gegeben sei eine Gerade g_r durch den Punkt $(-1; 0)$ mit dem Anstieg r. Zeige dass jede solche Gerade die Lösungsmenge der Gleichung $x^2 + y^2 = 1$ außer in $(-1; 0)$ noch genau ein weiteres Mal schneidet und berechne die Koordinaten dieses Schnittpunkts.

   (e) Zeige: Wenn der Anstieg r rational ist, dann hat dieser Schnittpunkt rationale Koordinaten. Zeige, dass auch umgekehrt gilt: Wenn dieser Schnittpunkt rationale Koordinaten hat, dann ist r rational.

   (f) Pythagoräische Tripel „entsprechen" also rationalen Punkten der Lösungsmenge der Gleichung $x^2+y^2 = 1$, die wiederum rationalen Anstiegen r der Geraden g_r entsprechen. Leite mit Hilfe von (a), (b) und (d) die bekannte Darstellung pythagoräischer Tripel ab.
   (r ist rational...)

   (g) Wann ist ein so gewonnenes pythagoräisches Tripel primitiv? Wo finden sich die Vielfachen eines primitiven pythagoräischen Tripels in der Lösungsmenge der Gleichung $x^2 + y^2 = 1$?

   (h) Finde alle primitiven pythagoräischen Tripel, die die Zahl 2013 enthalten und ermittle die zugehörigen Anstiege r.

2. **Ganzzahlige Lösungen gesucht**

   Finde alle ganzzahligen Lösungspaare (x, y) der Gleichung $x^2y + 2x^2 = 2y + 39$.

3. **Extra Question**

   Find all pairs of integers (x, y) such that $1 + x^2y = x^2 + 2xy + 2x + y$.