Aufgaben-Blatt 7

vom 12. bis 19. Dezember 2013

1. **Einheitswurzeln**

   Es seien x_1, x_2, x_3 die 3. Einheitswurzeln, also die Lösungen der Gleichung $x^3 = 1$. Weiter seien y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 die 5. Einheitswurzeln. Beweise, dass dann die Menge $\{x_i y_j \mid i \in \{1,2,3\}, j \in \{1,2,3,4,5\}\}$ gerade die Menge der 15. Einheitswurzeln ist.

   Zusatz: Klappt das auch, wenn man statt der 3. und 5. die 6. und 10. Einheitswurzeln nimmt?

2. **Etwas Bildhaftes II**

   Beschreibe folgende Teilmengen der komplexen Ebene und skizziere sie:

   (a) $A = \{z \in \mathbb{C} \mid (z + 42i)(\overline{z} - 42i) \geq 4052169\}$

   (b) $B = \{z \in \mathbb{C} \mid \frac{z}{\overline{z}} = 2\}$

   (c) $C = \{z \in \mathbb{C} \mid \frac{z}{\overline{z}} \leq 2\}$

   (d) $D_n = \{z \in \mathbb{C} \mid z^n = a, a \in \mathbb{R} \text{ beliebig}\}$ für gegebenes $n \in \mathbb{N}$

   (e) $E_n = \{z \in \mathbb{C} \mid z^n = b, b \in \mathbb{C} \text{ beliebig}\}$ für gegebenes $n \in \mathbb{N}$

   (f) $F = \{z \in \mathbb{C} \mid z^2 + 7z < 5\}$

3. **Etwas Geometrisches**

   Berechne $(z - w)(\overline{z} + \overline{w})$ durch Einsetzen von $z = r(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)$ und $w = s(\cos\psi + \mathrm{i}\sin\psi)$. Beachte die Additionstheoreme und $\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$.

   Kommt dir das Ergebnis bekannt vor?

   (*Tipp:* Welche Bedeutung hat $(z - w)(\overline{z} + \overline{w})$?)

4. **Zusatzaufgabe**

   Berechne $\cos\varphi + \cos 2\varphi + \cos 3\varphi + \ldots + \cos(n-1)\varphi + \cos n\varphi$.

   (*Tipp:* Betrachte die Zahl als Realteil von $(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi) + (\cos 2\varphi + \mathrm{i}\sin 2\varphi) + \ldots$ und verwende die Formel von Moivre und dann die ...)

Am 19.12. findet der letzte MSG-Zirkel vor Weihnachten statt. Bitte bringt alle eine Knobelaufgabe oder eine spannende mathematische Fragestellung mit oder unterhaltet uns auf andere Weise mit interessanter Mathematik. Der Kreativität sind keine Grenzen gesetzt.