

## Vermischte Aufgaben zum Extremalprinzip

### Beispiel 1 *Unendliche Gitterzahlen*

*In einem unendlichen quadratischen Gitter soll jeder Gitterpunkt so mit einer natürlichen Zahl beschriftet werden, dass jede Zahl gleich dem Durchschnitt der vier waagrecht und senkrecht benachbarten Zahlen ist. Beweise, dass dann alle Zahlen gleich sind.*

### Beispiel 2 *Polyeder*

*Gibt es einen konvexen Polyeder, bei dem jede Seitenfläche eine andere Anzahl von Ecken hat?*

### Beispiel 3 *Unialltag*

*100 Studenten besuchen eine Vorlesung. Jeder Student kommt und geht wann er will, aber glücklicherweise nur jeweils einmal. Es ist bekannt, dass es unter drei beliebig herausgegriffenen Studenten stets zwei gibt, die eine Weile gemeinsam in der Vorlesung anwesend sind. Der Dozent will eine wichtige Ankündigung machen. Wie oft muss er die Ankündigung machen, um sicherzustellen, dass sie von allen Studenten gehört wird?*

### Beispiel 4 *Brunnenbau*

*In einem Gebiet stehen  $n$  Häuser und  $n$  Brunnen. Jedes Haus soll durch eine geradlinige Wasserleitung mit einem Brunnen verbunden werden. Glücklicherweise sind die Häuser und Brunnen so angeordnet, dass keine 3 auf einer Linie stehen, was den Brunnenbau behindern würde. Jeder Brunnen soll benutzt werden und keine zwei Wasserleitungen sollen sich kreuzen. Zeige, dass dies stets möglich ist.*

### Beispiel 5 *Schachturnier*

*Bei einem Schachturnier sind einige der angemeldeten Teilnehmer krank geworden, so dass es nur sehr wenige Spieler gab. Also spielte jeder gegen jeden. Interessanterweise gab es keine Unentschieden. Nach Turnierende schreibt sich jeder der interessierten Schachspieler die Namen aller Spieler auf ein Blatt, die er besiegt hat, und auch die Namen aller derer, die gegen einen von ihm besiegten Spieler verloren haben. Zeige, dass es einen Spieler gibt, der alle Namen auf seinem Blatt stehen hat.*

### Beispiel 6 *Mattes Autorennen*

*Auf einer kreisförmigen Strecke fahren  $n$  identische Autos. Leider haben die Autos insgesamt so viel Benzin im Tank, dass es gerade einmal ausreicht, dass ein Auto eine vollständige Runde fahren könnte – aber das Benzin ist völlig ungleichmäßig verteilt!*

*Zeige, dass eines der Autos eine komplette Runde fahren kann, indem es von einem Auto zum nächsten fährt und dessen Benzin in seinen Tank umfüllt.*

*Kann man etwas darüber sagen, welches Auto das ist?*

### **Beispiel 7 Wildes Morden**

*Spät des nachts treffen sich 23 gemeine Mafiosi auf dem Marktplatz in Palermo zur alljährlich stattfindenden „Allgemeinen Zufälligen Massenrache“ (AZM). Da sich jeder von ihnen für etwas Besonderes hält, achten sie alle pingelig darauf, dass alle möglichen Abstände zwischen den Mafiosi paarweise verschieden sind. Punkt 0 Uhr, als die Glocken zu läuten beginnen, erschießt jeder Mafioso denjenigen Mafioso mit der geringsten Entfernung zu ihm. Die AZM dauert nur eine Sekunde.*

*Nun stell dir vor, du wirst als Journalist beauftragt, einen Artikel über die AZM zu schreiben. Leider warst du nicht vor Ort. Was könntest du schreiben? Es soll gehaltvoll sein und auf jeden Fall richtig! Da läuten deine gut funktionierenden mathematischen Hirnzellen und dir fallen ein paar Fragen dazu ein:*

1. \_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_
2. \_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_
3. \_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_
4. \_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_
5. \_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_
6. \_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_

*Du grübelst ein wenig und kommst zu folgenden Vermutungen:*

1. \_\_\_\_\_
2. \_\_\_\_\_
3. \_\_\_\_\_
4. \_\_\_\_\_
5. \_\_\_\_\_
6. \_\_\_\_\_

*Kannst du die Vermutungen beweisen?*

*Zusatzfrage: Was soll das eigentlich mit den unterschiedlichen Abständen? Wäre dein Artikel genauso gehaltvoll, wenn dies keine Bedingung der AZM wäre?*