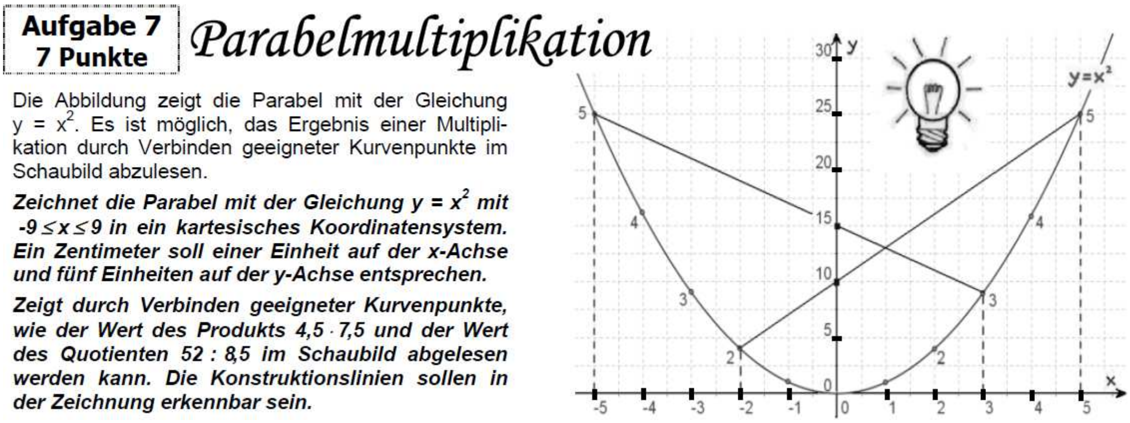
Aufgaben-Blatt 11

vom 30. Januar bis 13. Februar 2014

1. **Aus dem Wettbewerb „Mathematik ohne Grenzen 2009“**



Aufgabe 7
7 Punkte

Parabelmultiplikation

Die Abbildung zeigt die Parabel mit der Gleichung $y = x^2$. Es ist möglich, das Ergebnis einer Multiplikation durch Verbinden geeigneter Kurvenpunkte im Schaubild abzulesen.

Zeichnet die Parabel mit der Gleichung $y = x^2$ mit $-9 \leq x \leq 9$ in ein kartesisches Koordinatensystem. Ein Zentimeter soll einer Einheit auf der x-Achse und fünf Einheiten auf der y-Achse entsprechen.

Zeigt durch Verbinden geeigneter Kurvenpunkte, wie der Wert des Produkts $4{,}5 \cdot 7{,}5$ und der Wert des Quotienten $52 : 8{,}5$ im Schaubild abgelesen werden kann. Die Konstruktionslinien sollen in der Zeichnung erkennbar sein.

Formuliere eine allgemeine Regel und beweise diese.

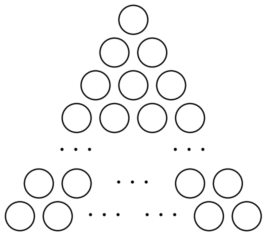
2. **Special sequences**

Find all sequences of rational numbers $a_0, a_1, a_2, \ldots$ which satisfy:

(a) $a_{n+1} = 2a_n^2 - 1$ for all $n \geq 0$

(b) $a_i = a_j$ for some $i \neq j$.

3. **Dreiecksbastelei**



Bernd will runde Spielsteine in Form eines gleichseitigen Dreiecks anordnen. Er beginnt mit 2014 Steinen und stellt fest, dass eine solche Anordnung nicht möglich ist. Daraufhin startet er eine Versuchsreihe, indem er zu den 2014 vorhandenen Steinen zunächst einen Stein hinzunimmt. Nachdem sein Vorhaben wieder nicht gelingt, beschließt er, im nächsten Versuch zu den dann vorhandenen 2015 Steinen gleich zwei weitere Steine auf einmal hinzuzunehmen. Im nächsten Versuch nimmt er zu den vorhandenen 2017 Steinen gleichzeitig drei neue Steine hinzu, und er fährt fort, indem er die Anzahl der auf einmal hinzutretenden Steine von Versuch zu Versuch um eins erhöht.

(a) Beweise, dass Bernd ein Dreieck legen kann, wenn er seine Versuche genügend lange fortsetzt.

(b) Wie oft wird Bernd ein Dreieck legen können, wenn er seine Versuchsreihe beliebig lange fortsetzt?

4. **Zusatzaufgabe**

Finde eine Potenzreihenentwicklung von $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 5x + 6}$.

(*Tipp: Das Quadrat im Nenner ist hinderlich. Schreibe $f(x)$ als Summe zweier Brüch mit linearem Nenner.*)

Schöne Ferien!