

Aufgaben-Blatt 12

vom 13. bis 20. Februar 2014

1. Pythagoräische Tripel

Um ein paar Beispiele pythagoräischer Tripel zu sehen, hat Yannic im Internet eine Auflistung gesucht. In der Liste, die er gefunden hat, stehen alle pythagoräischen Tripel, bei denen die größte Zahl kleiner oder gleich 100 ist (siehe unten). „Mensch, es gibt ja einige Zahlen, die überhaupt nicht in der Liste vorkommen“, weist ihn Paul hin. Lukas, der gerade dazukommt, meint sofort: „Na, dass 1 und 2 nicht in einem pythagoräischen Tripel vorkommen können, ist ja klar.“ „Aber es gibt ja noch viel mehr Zahlen, die nicht vorkommen“ stellt Tanja fest, „die nächstgrößere ist 19.“ Da sagt Philipp provokativ: „Es gibt gar kein pythagoräisches Tripel, in dem die Zahl 19 vorkommt.“

- (a) Überprüfe Philipps Aussage. Hat er Recht? Wenn ja, beweise die Richtigkeit seiner Aussage. Wenn nein, begründe deine Antwort und gib ein Beispiel für ein pythagoräisches Tripel an, in dem 19 vorkommt.
- (b) Finde alle natürlichen Zahlen, die *nicht* in einem pythagoräischen Tripel vorkommen können. Begründe, warum diese Zahlen wirklich alle sind.
- (c) Welche natürlichen Zahlen können *nicht* in einem *primitiven* pythagoräischen Tripel vorkommen? Begründe, warum diese Zahlen wirklich alle sind.

2. Sum of five squares

Prove that the sum of the squares of five successive integers is never a square.

3. Zusatzaufgabe

Finde alle Paare (a, b) ganzer Zahlen, sodass $a^2 + b^2$ und $a^2 - b^2$ beides Quadratzahlen sind.

$3^2 + 4^2 = 5^2$	$15^2 + 20^2 = 25^2$	$25^2 + 60^2 = 65^2$	$39^2 + 80^2 = 89^2$
$5^2 + 12^2 = 13^2$	$15^2 + 36^2 = 39^2$	$27^2 + 36^2 = 45^2$	$40^2 + 42^2 = 58^2$
$6^2 + 8^2 = 10^2$	$16^2 + 30^2 = 34^2$	$28^2 + 45^2 = 53^2$	$40^2 + 75^2 = 85^2$
$7^2 + 24^2 = 25^2$	$16^2 + 63^2 = 65^2$	$28^2 + 96^2 = 100^2$	$42^2 + 56^2 = 70^2$
$8^2 + 15^2 = 17^2$	$18^2 + 24^2 = 30^2$	$30^2 + 40^2 = 50^2$	$45^2 + 60^2 = 75^2$
$9^2 + 12^2 = 15^2$	$18^2 + 80^2 = 82^2$	$30^2 + 72^2 = 78^2$	$48^2 + 55^2 = 73^2$
$9^2 + 40^2 = 41^2$	$20^2 + 21^2 = 29^2$	$32^2 + 60^2 = 68^2$	$48^2 + 64^2 = 80^2$
$10^2 + 24^2 = 26^2$	$20^2 + 48^2 = 52^2$	$33^2 + 44^2 = 55^2$	$51^2 + 68^2 = 85^2$
$11^2 + 60^2 = 61^2$	$21^2 + 28^2 = 35^2$	$33^2 + 56^2 = 65^2$	$54^2 + 72^2 = 90^2$
$12^2 + 16^2 = 20^2$	$21^2 + 72^2 = 75^2$	$35^2 + 84^2 = 91^2$	$57^2 + 76^2 = 95^2$
$12^2 + 35^2 = 37^2$	$24^2 + 32^2 = 40^2$	$36^2 + 48^2 = 60^2$	$60^2 + 63^2 = 87^2$
$13^2 + 84^2 = 85^2$	$24^2 + 45^2 = 51^2$	$36^2 + 77^2 = 85^2$	$60^2 + 80^2 = 100^2$
$14^2 + 48^2 = 50^2$	$24^2 + 70^2 = 74^2$	$39^2 + 52^2 = 65^2$	$65^2 + 72^2 = 97^2$