MSG Klasse 8b
Hoffkamp
Internet: wikis.zum.de/qed

Rekursionen

Aufgabe 1:
Gegeben seien n Geraden in der Ebene, von denen keine zwei parallel seien und von denen keine drei durch einen Punkt gehen sollen (man sagt auch „die Geraden sind **in allgemeiner Lage**"). In wie viele Teilgebiete zerlegen sie die Ebene?

Fertige zunächst eine Tabelle an für n=1,2,3,4 und a_n="Anzahl der Gebiete bei n Geraden". Was fällt Dir auf? Finde eine Formel für a_n abhängig von a_{n-1}.

Definition: Eine **Rekursion** für eine Folge von Zahlen a_1, a_2, a_3, ... ist eine Formel, die jedes a_n mit Hilfe von a_{n-1}, a_{n-2},..., a_1 ausdrückt.

Aufgabe 2:
Löse die Rekursionen $a_n= a_{n-1}+1$, $a_n= na_{n-1}$ und $a_n=a_{n-1}^2$ (für alle n>1) auf, jeweils mit der Anfangsbedingung $a_1=1$.

Aufgabe 3:
Auf wie viele Arten kann man ein Brett der Größe 2 x n mit Dominosteinen der Größe 1 x 2 überdecken? Probiere wieder verschiedene Werte von n aus und finde eine Rekursion.

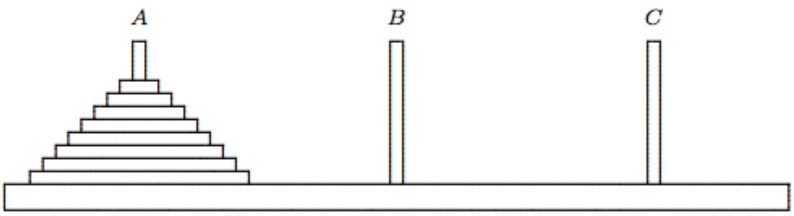
Aufgabe 4:
a) Bestimme die Anzahl der 0,1-Folgen der Länge n, bei denen keine aufeinanderfolgenden Einsen auftreten. Zum Beispiel für n=3 sind das die Folgen 000,001,010,100,101.

b) Bestimme die Anzahl der Folgen bestehend aus den Zahlen 0,1,....,9 der Länge n, die keine aufeinanderfolgenden Nullen haben.

c) Sei n eine natürliche Zahl. Wie viele Teilmengen von {1, ..., n} enthalten keine zwei aufeinanderfolgende Zahlen?

Aufgabe 5: (Turm von Hanoi)

Gegeben sind n runde, gelochte Holzscheiben (etwa $n = 8$ oder $n = 9$), alle verschieden groß. Es gibt drei senkrechte Stäbe A, B, C. Zu Beginn bilden die Scheiben einen Stapel um den Stab A, und zwar der Größe nach geordnet (die kleinste Scheibe liegt oben). Ziel des Spiels ist es, den Stapel von A nach C zu versetzen. Bei jedem Zug darf die oberste Scheibe eines beliebigen Stapels auf einen der beiden anderen Stäbe gelegt werden, dabei darf nie eine größere Scheibe auf einer kleineren liegen. Ausgangsposition:



a) Finde eine Rekursion für die Anzahl der Züge M_n bei n Scheiben. Löse diese Rekursion.
b) Angenommen wir haben 64 Scheiben und benötigen pro Zug eine Sekunde. Wie lange wären wir mit dem Umlegen beschäftigt?