Aufgaben-Blatt 3

vom 23. August bis 18. Oktober 2012

1. **Rekursive Folgen**

   Die Folge $(4, -3, 21, 3, 129, 147, \ldots)$ ist durch $a_0 = 4$, $a_1 = -3$ und die rekursive Vorschrift $a_n = a_{n-1} + 6a_{n-2}$ $(n \geq 2)$ gegeben. Finde eine explizite Formel für a_n.

2. **Eine Ungleichung zur Abwechslung**

   Beweise, dass für alle $x \in \mathbb{R}_+, x \neq 1$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\frac{1 - x^{2n+1}}{1 - x} \geq (2n + 1) \cdot x^n$$

3. **Some Calculations**

   Calculate:

   (a) $\left(1 + \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{3}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{4}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 + \frac{1}{18}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{19}\right)$

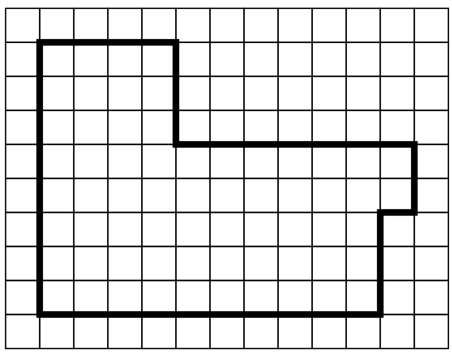
   (b) $\frac{1}{\sqrt{1} + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{4}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{23} + \sqrt{24}} + \frac{1}{\sqrt{24} + \sqrt{25}}$

   (c) $\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \ldots + \frac{1}{17 \cdot 18 \cdot 19} + \frac{1}{18 \cdot 19 \cdot 20}$

   (d) $f_1^2 + f_2^2 + f_3^2 + \ldots + f_{n-1}^2 + f_n^2$, where f_n is the sequence of Fibonacci numbers (*Hint: The Fibonacci rule in the form of* $f_n = f_{n+1} - f_{n-1}$ *helps.*)

4. **Zusatzaufgabe**

   Auf kariertem Papier ist die rechts abgebildete Figur gezeichnet. Wer sich einmal die Mühe macht, die Kästchen der Figur auszuzählen, wird feststellen, dass es genau 64 sind. Das ist bekanntlich $8 \cdot 8$, also sollte es doch möglich sein, die Figur entlang der Kästchenlinien so in zwei Teile zu zerteilen, dass man aus ihnen ein Quadrat der Seitenlänge 8 zusammenlegen kann, oder?



Sonderaufgabe für die Semesterpause

Die folgende komplexe Aufgabe dient einerseits dazu, eine interessante Entdeckung zu machen, andererseits dazu, eure Ideen und Lösungsschritte einmal sauber und gut gegliedert in einem LaTeX-Dokument zu formulieren. Ihr habt einen Monat Zeit für euren LaTeX-Artikel, ich erwarte eure Artikel per E-Mail **bis zum 28.9.2012**, also bis zu den Herbstferien. Eher schicken ist selbstverständlich erlaubt.

Was heißt *komplexe Aufgabe*? Ich hätte die Aufgabe auch sehr kurz formulieren können: Finde eine Methode, wie sich für eine beliebige arithmetische Zahlenfolge beliebiger Ordnung schnell eine explizite Formel finden lässt, die zudem ohne das Wissen bekannter Formeln wie z. B. der für die ersten n natürlichen Zahlen auskommt.

Statt dessen habe ich diesen Aufgaben-Brocken, bei dem man erst einmal gar nicht weiß, wo man anfangen soll, in kleinere Happen zerlegt. Diese helfen euch zum einen beim Finden der Lösung, zum anderen aber auch bei der Gliederung eures Artikels. Diese kann den Vorgaben auf diesem Aufgabenblatt folgen, kann aber auch ganz anders sein, wenn ihr eine bessere Idee habt. Entscheidet selbst, wie ihr den Artikel gestaltet, welche Überschriften ihr wählt, usw.

Hilfen zu LaTeX werden im Wiki gesammelt, bitte tauscht euch aus, wenn es Fragen gibt oder wenn ihr einfach wissen wollt, wie andere etwas gelöst haben.

....

Im Zirkel haben wir eine Methode kennengelernt, wie man für eine arithmetische Folge k-ter Ordnung eine explizite Formel finden kann. Dabei brauchten wir jedoch eine Formel für die Summe der ersten n natürlichen Zahlen, Quadratzahlen, dritten Potenzen... Doch wo kommen diese Formeln denn her? Mit der besprochenen Methode findet man sie nicht, da man sich sonst im Kreis drehen würde, die Formel also schon bräuchte, die man sucht. Wer das noch nicht glaubt, sollte es einfach ausprobieren!

In dieser Aufgabe geht es darum, eine schnelle Methode zum Finden expliziter Formeln für arithmetische Folgen zu erarbeiten, mit denen sich eben auch die gerade angesprochenen Formeln finden lassen.

Dazu betrachten wir die folgende Tabelle, die wie folgt entstanden ist: In die ersten Zeile wurde die konstante Folge $a_n^{(0)} = 1$ geschrieben. Die Folge $a_n^{(1)}$ darunter ist entstanden, indem alle vorangegangenen Glieder der Folge $a_n^{(0)}$ addiert wurden, also

$$a_n^{(1)} = a_0^{(0)} + a_1^{(0)} + a_2^{(0)} + \ldots + a_{n-1}^{(0)} = \underbrace{1 + 1 + \ldots + 1}_{n-\text{mal}} = n\,.$$

Auf völlig analoge Weise entsteht die Folge $a_n^{(k)}$ durch Addition der vorangegangenen Glieder der Folge in der Zeile darüber. (Das jeweils erste Glied $a_0^{(k)}$ wird gleich 0 gesetzt.) Der obere Index in Klammern bezeichnet also einfach die Nummer der Folge, der untere Index wie üblich die Nummer des jeweiligen Folgenglieds.

	k \ n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	...
$a_n^{(0)}$	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	...
$a_n^{(1)}$	1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	...
$a_n^{(2)}$	2	0	0	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	66	78	...
$a_n^{(3)}$	3	0	0	0	1	4	10	20	35	56	84	120	165	220	286	...
$a_n^{(4)}$	4	0	0	0	0	1	5	15	35	70	126	210	330	495	715	...
$a_n^{(5)}$	5	0	0	0	0	0	1	6	21	56	126	252	462	792	1287	...

1. Welches bekannte Objekt ist in dieser Tabelle zu erkennen? Erkläre, warum das so ist.
2. Welche tiefere Bedeutung haben also die Zahlen, die in der Tabelle vorkommen? Finde für jedes $k \in \mathbb{N}$ eine explizite Formel für die Folge $a_n^{(k)}$.
3. Passt diese Formel auch für die ersten Folgenglieder, die gleich 0 sind? Ist das nur eine Festlegung, dass diese Folgenglieder 0 sind oder gibt es eine gute Begründung dafür?
   (*Tipp: die Formel aus (b) lässt sich etwas anders schreiben, so dass sie auch für die ersten Folgenglieder Sinn ergibt.*)
4. Gegeben sei eine arithmetische Folge $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ 2. Ordnung. Wir wissen, dass eine solche Folge bereits eindeutig durch die ersten drei Glieder bestimmt ist.
   (a) Begründe, dass a_n ebenso durch das erste Glied a_0, das erste Glied b_0 der ersten Differenzenfolge und das erste Glied c_0 der (konstanten) zweiten Differenzenfolge eindeutig bestimmt ist.
   (b) Beweise, dass $a_n = a_0 + b_0 \cdot n + c_0 \cdot \dfrac{n(n-1)}{2}$ ist.
   (*Tipp: Betrachte zuerst den Spezialfall* $a_0 = b_0 = 0$ *und vergleiche die entsprechende Folge mit der Tabelle oben.*)
5. Sei nun $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ eine arithmetische Folge beliebiger Ordnung k. Wie kann man sehr schnell eine explizite Formel für a_n finden? Gib diese Formel an und beweise sie.
6. Überprüfe die gefundene Methode, indem du damit eine Formel für die Summe der ersten n natürlichen Zahlen, der ersten n Quadratzahlen und der ersten n Kubikzahlen ermittelst und mit den dir bekannten Formeln vergleichst.
   (*Hinweis: Vergiss nicht zu begründen, dass es sich bei diesen Folgen tatsächlich um arithmetische Folgen handelt und die Methode also überhaupt anwendbar ist.*)
7. Wie lautet die Formel für die Summe der 4. Potenzen $1^4 + 2^4 + 3^4 + \ldots + n^4$?
8. Finde ein eigenes Beispiel als Anwendung der erarbeiteten Methode.

(*Bemerkung: Ziel ist es, einen LaTeX-Artikel zu verfassen. Das soll nicht daran scheitern, dass ein Aufgabenteil nicht verstanden wird. Tauscht euch im Wiki aus!*)

Aufträge für die Semesterpause

vom 23. August bis 18. Oktober 2012

1. Gestaltet unser QED-Wiki! Bis **Ende August** soll sich da eine Menge tun.
   (a) Eine Benutzerseite ist für jeden bereits angelegt, gestaltet sie nach eurem Belieben, Anregungen für Informationen, die da auftauchen sollten, gibt es im Wiki bereits.
   (b) Zu den ersten drei Zirkeln wollen wir gemeinsam einen kurzen inhaltlichen Abriss im Wiki darstellen. Die entsprechende Seite ist bereits angelegt. Füllt sie mit Leben!
   (c) Ein wichtiges Beispiel für Folgen ist die altbekannte Fibonacci-Folge. Zu dieser wollen wir alles mögliche sammeln, was bekannt ist und von euch gefunden wird. Das können Formeln sein, Eigenschaften wie Teilbarkeit, Summen von Fibonacci-Zahlen, Kehrwerten oder Quotienten, Auftreten von Fibonacci-Zahlen bei mathematischen Aufgaben oder auch in der Natur,. . . . Die Vielfalt ist bei dieser Folge grenzenlos, das wollen wir im Wiki aufzeigen.
2. Es gibt eine Sonderaufgabe, zu der ein kleiner Artikel in LaTeX zu schreiben ist. Abzugeben ist der Artikel bis zum **28. September** per E-Mail.
3. Das normale Aufgabenblatt ist bis zum nächsten Zirkel am **18. Oktober** zu bearbeiten.