

Aufgaben-Blatt 14
vom 27. Februar bis 6. März 2014

Aufgaben aus der Mathematikolympiade, 3. Stufe

1. MO 530833

Untersuche, ob es 2014 aufeinanderfolgende, positive ganze Zahlen derart gibt, dass ihre Summe eine Quadratzahl ist.

2. MO 530931 bzw. 531031

Wir untersuchen Folgen (a_n) natürlicher Zahlen, die für vorgegebene Startwerte $p, q \in \mathbb{N}$ durch die Bildungsvorschrift

$$a_1 = p, a_2 = q \text{ und } a_{n+2} = a_n \cdot a_{n+1} \text{ für } n \geq 1$$

bestimmt sind.

(a) Geben Sie für $p = 3$ und $q = 2$ die Folgenglieder a_1 bis a_6 an.

Es seien nun allgemeiner die Startwerte p und q zwei voneinander verschiedene Primzahlen.

(b) Bestimmen Sie die Primfaktorzerlegung von a_1 bis a_{12} .

(c) Weisen Sie nach, dass kein Folgenglied a_n eine Quadratzahl sein kann.

Zusatzfrage: Können Quadratzahlen in der Folge (a_n) vorkommen, wenn p und q *nicht* voneinander verschiedene Primzahlen sind?

3. Zusatzfrage: MO 530936 bzw. 531036

Im Raum liegen 53 verschiedene Geraden, die mindestens 1337 verschiedene Schnittpunkte haben.

Beweisen Sie, dass die Geraden alle in einer gemeinsamen Ebene liegen.